## §3.4 可测集族

Thm. $\mathbb{R}^n$中的任何区间I可测，且 $m(I)=|I|$.

Cor. $m(\mathbb{R}^n)=+\infty$.

Lem. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$，则 $m^*(E)=\inf\{m(G): E\subseteq G, G$ 为开集$\}$

Pf. 由外测度单调性，$m^*(E)\leqslant m^*(G)=m(G)$

若 $m^*(E)=+\infty$，则 $m^*(G)=+\infty$，$\forall G$.

若 $m^*(E)<+\infty$，

$m^*(E)=\inf\{\Sigma|I_k|: E\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k, I_k$ 开区间$\}<+\infty$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\{I_k\}$ s.t. $m^*(E)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<m^*(E)+\varepsilon$

令 $G=\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$，$E\subseteq G$，$m(G)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|$

于是 $m(G)\leqslant m^*(E)+\varepsilon$，$\forall\varepsilon$

令 $\varepsilon\to0$ 有 $m(G)=m^*(E)$

Cor. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$可测，则 $\forall\varepsilon$，有：

$\exists$开集 $G\supset E$ s.t. $m(G\setminus E)<\varepsilon$，$m(G)\leqslant m(E)+\varepsilon$

$\exists$闭集 $F\subset E$ s.t. $m(E\setminus F)<\varepsilon$，$m(E)\leqslant m(F)+\varepsilon$

Thm. 设E可测，

(1) $\exists G_\delta$集 $H\supset E$ s.t. $m(H\setminus E)=0$，$m(H)=m(E)$

(2) $\exists F_\sigma$集 $K\subset E$ s.t. $m(E\setminus K)=0$，$m(E)=m(K)$.

Pf. (1) 取 $\varepsilon=\frac{1}{k}$，则 $m(\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k\setminus E)=0$

乘积测度：

Thm. $A\subseteq \mathbb{R}^p$，$B\subseteq \mathbb{R}^q$ 可测，则 $A\times B\subseteq \mathbb{R}^{p+q}$ 可测

且 $m(A\times B)=m(A)\times m(B)$.

Pf. (1) $A, B$ 为区间时显然成立

(2) $A, B$ 为开集时，$A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$，$B=\bigcup\limits_{p=1}^{\infty} J_k$

$A\times B=\bigcup(I_k\cdot J_p)$，$m(A\times B)=m(A)\times m(B)$.

(3) $A, B$ 为有界 $G_\delta$ 集：$A=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$，$B=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k$

$(\cap A_k)\times(\cap B_p)=\cap(A_k\times B_p)=\sum m(A_k)\times m(B_p)$

(4) $A, B$ 有界可测

(5) $A, B$ 可测.

(1)：设 $A=(a_1,b_1]\times\cdots\times(a_p,b_p]$

$B=(a_{p+1},b_{p+1}]\times\cdots\times(a_{p+q},b_{p+q}]$

$A\times B=(a_1,b_1]\times\cdots\times(a_{p+q},b_{p+q}]$

注意 $A\times B$ 还是区间，于是 $m(I)=|I|=\prod\limits_{k=1}^{p+q}(b_k-a_k)=m(A)\times m(B)$

(2)：设 $A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$，$I_k$ 互不交，$B=\bigcup\limits_{p=1}^{\infty} J_p$，$J_p$ 互不交

$A\times B=(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k)\times(\bigcup\limits_{p=1}^{\infty} J_p)=\bigcup\limits_{k,p=1}^{\infty}(I_k\times J_p)$

于是 $m(A\times B)=m\left(\bigcup\limits_{k,p=1}^{\infty}(I_k\times J_p)\right)=\sum\limits_{k,p=1}^{\infty} m(I_k)\times m(J_p)$

其中 $I_k\times J_p$ 互不交，于是测度的可数可加性成立.

若 $m(A)=0$，则 $A=\phi$，$m(A\times B)=0$，若 $m(A)=+\infty$，则发散.

有 $\sum\limits_{k,p=1}^{\infty} m(I_k)\times m(J_p)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} m(I_k)\times\sum\limits_{p=1}^{\infty} m(J_p)=m(A)\times m(B)$.

(3) 令 $A=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$，$B=\bigcap_{p=1}^{\infty}B_p$，其中 $A_k, B_p$ 为开集单调递减

于是 $A\times B=(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k)\times(\bigcap_{p=1}^{\infty}B_p)=\bigcap_{k,p=1}^{\infty}(A_k\times B_p)$

$\forall k,p$，$A\subseteq A_k$，$B\subseteq B_p$，由 $A, B$ 有界，$A_k, B_p$ 有界

$$m(A\times B)=m\left(\bigcap_{k,p=1}^{\infty}(A_k\times B_p)\right)\le m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}(A_k\times B_k)\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}m(A_k\times B_k)=\lim_{k\to\infty}m(A_k)\times m(B_k)$$

由 $A_k, B_p$ 有界，$\lim_{k\to\infty}m(A_k)\times m(B_k)=\lim_{k\to\infty}m(A_k)\times\lim_{k\to\infty}m(B_k)$

另外有 $m(A\times B)\le m(\inf(A_k\times B_p))=m(A)\times m(B)$. $=m(A)\times m(B)$.

(4) 先考虑 $m(A)=0$ 或 $m(B)=0$.

一定存在 $G_\delta$ 集 $H_A$ s.t. $H_A\supseteq A$，满足 $m(H_A\setminus A)=0$.

$H_B$ s.t. $H_B\supseteq B$，满足 $m(H_B\setminus B)=0$.

$$H_A\times H_B=(A\times B)\cup((H_A\setminus A)\times B)\cup(A\times(H_B\setminus B))\cup((H_A\setminus A)\times(H_B\setminus B))$$

不妨设 $m(A)=0$，则 $m(H_A)=0$，于是 $m(H_A)\times m(H_B)=0$.

即 $m(H_A\times H_B)=m(H_A)\times m(H_B)$.

下面考虑一般可测集有界的情形：

同样也应有 $H_A$ 和 $H_B$，记 $F=H_A\setminus A$，$E=H_B\setminus B$，则：

$H_A\times H_B=(A\times B)\cup(A\times E)\cup(F\times B)\cup(F\times E)$

由 (3) 有，$m(H_A\times H_B)=m(H_A)\times m(H_B)=m(A)\times m(B)$

又有 $m(H_A\times H_B)=m(A\times B)$，于是 $m(A\times B)=m(A)\times m(B)$.

$(m(A\times E)=m(F\times B)=m(F\times E)=0)$.

(5) $\mathbb{R}^{p+q}=\bigcup_{k=1}^{\infty}((-k,k)\times\cdots(-k,k))$

于是 $(A\times B)\cap\mathbb{R}^{p+q}=(A\times B)\cap(\bigcup I_k)=(A\cap(\bigcup I_k^A))\times(B\cap(\bigcup J_k^B))$

$$=\bigcup(A\cap I_k^A)\times\bigcup(B\cap J_k^B)$$

$$\lim_{k\to\infty}m((A\times B)\cap I_k)=\lim_{k\to\infty}m(A\cap I_k^A)\times\lim_{k\to\infty}m(B\cap J_k^B)=m(A)\times m(B)$$

考虑有限和无限情形都成立.